Théorème :

Soit $a \leq b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.

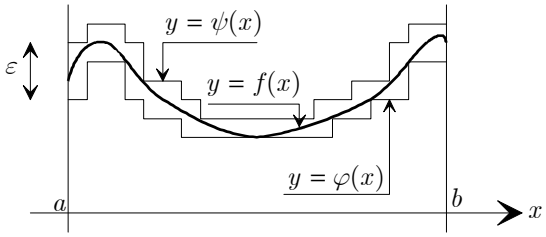
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions φ et ψ en escalier définies sur $[a,b]$

telles que $\begin{cases} \phi \leq f \leq \psi \\ 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon \end{cases}$.

Démonstration :

Commençons par le cas d'une fonction f définie et continue sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$.



Par le théorème de Heine, on peut dire que f est uniformément continue sur $[a,b]$, par conséquent :

$\exists \eta > 0, \forall x, y \in [a,b], |y-x| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $(b-a)/n \leq \eta$ et $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ la subdivision à pas constant définie par $a_i = a + i.\dfrac{b-a}{n}$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, la fonction f est continue sur le segment $[a_{i-1}, a_i]$, par le principe du maximum :

$\exists (\alpha, \beta) \in [a_{i-1}, a_i]^2, \forall x \in [a_{i-1}, a_i], f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$.

Posons $m_i = f(\alpha)$ et $M_i = f(\beta)$.

Comme $|\beta - \alpha| \leq |a_i - a_{i-1}| \leq \eta$ on a $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \varepsilon$ et on en déduit que $0 \leq M_i - m_i \leq \varepsilon$.

Définissons maintenant des fonctions φ et ψ qui vont être solutions de notre problème.

Pour $1 \leq i \leq n$, sur $]a_{i-1}, a_i[$ on pose φ constante égale à m_i et ψ constante égale à M_i.

Pour $0 \leq i \leq n$, en a_i on pose $\varphi(a_i) = \psi(a_i) = f(a_i)$.

Les fonctions φ et ψ sont définies et en escalier sur $[a,b]$.

L'encadrement $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ est vérifié sur chaque $]a_{i-1}, a_i[$ et en chaque a_i.

Enfin, l'encadrement $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$ est vérifié pour les mêmes raisons.

Il reste à généraliser le résultat aux fonctions continues par morceaux.

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ une subdivision adaptée à f et $\varepsilon > 0$.

Pour $1 \leq i \leq n$, notons f_i la restriction de f à $]a_{i-1}, a_i[$.

On peut prolonger f_i par continuité en a_i et en a_{i-1} en posant $f_i(a_i) = \lim\limits_{a_i^-} f$ et $f_i(a_{i-1}) = \lim\limits_{a_{i-1}^+} f$.

En appliquant le résultat précédent à la fonction f_i : il existe deux fonctions en escaliers φ_i et ψ_i définies sur $[a_{i-1}, a_i]$ telles que : $\forall x \in [a_{i-1}, a_i], \varphi_i(x) \leq f(x) \leq \psi_i(x)$ et $0 \leq \psi_i(x) - \varphi_i(x) \leq \varepsilon$.

On peut alors définir deux fonctions en escalier φ et ψ qui vont résoudre notre problème :

Pour $1 \leq i \leq n$, sur $]a_{i-1}, a_i[$ on pose $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ et $\psi(x) = \psi_i(x)$.

Pour $0 \leq i \leq n$, en a_i on pose $\varphi(a_i) = \psi(a_i) = f(a_i)$.

Les fonctions φ et ψ sont définies et en escalier sur $[a,b]$.

Par construction l'encadrement $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ est vérifié sur chaque $]a_{i-1}, a_i[$ et en chaque a_i.

et l'encadrement $0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$ l'est aussi pour les mêmes raisons.